نموذج مقترح لتقدير معالم دالة ماكيهام

مصطفي يسري عبد اللطيف البحيري
مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
تجارة اسماعيلية – جامعة قناة السويس

الملـخص:
دالة الحياة تصور سلوك ظاهرة انتهاء الحياة عن طريق الموت لمجموعة من الأفراد لآخر باقي في المجموعة. وتستخدم هذه الدالة في تقديرات معدلات الوفيات المختلفة وعدد الباقين علي قيد الحياة لآخر عمر في الجدول وكذلك في اعداد جداول اكتوارية تستخدم في تقدير تكلفةالمنتجات المختلفة لتأمينات الحياة.

ولأن درجة دقة التقديرات يعتبر امرا حيويا في هذا المجال، ولذلك يفضل استخدام دالة حياة تم تعديلها - مما يؤدي الي زيادة درجة دقة النتائج المقدرة بواسطتها- في تقديرات تكلفة التأمين مما يحقق هدفا اساسيا للنظام الاكتواري وهو العدالة التأمينية بين طرفي عقد التأمين.

مصطلحات: دالة الحياة، الجداول الاكتوارية، معدل الحياة، تكلفة التأمين.

Abstract:

Function of life depicting the behavior of the phenomenon of the end of a life through death to a group of individuals to last the rest of the group.

This function is used in the estimates of the different mortality rates and the number of remaining alive for the last age in the table as well as in the preparation of actuarial tables used in estimating the cost of different products for life insurance. Because the degree of accuracy of the estimates is considered vital in this area, therefore, prefer to use a function of life have been modified - which would lead to increase the degree by which the estimated accuracy of the results - in the estimates of the cost of insurance, which achieve a basic goal of the system which is the actuarial justice between the parties to the insurance contract of insurance.

أولا: ـ مقدمة

تعتبر جداول الوفيات أداة هامة يسعى إليها الإكتواريون وجميع المهتمين بتأمينات الحياة لأنه الأساس الفني للحسابات الاكتوارية مثل تقدير الأقساط والاحتياطيات الفنية المختلفة وتساعد من ناحية أخري في وضع السياسات التأمينية الخاصة بعمليات الاكتتاب وإعادة التأمين. وتتكون عملية اعداد جداول الوفيات بمرحلتين: الأولى تهدف الي تحديد البيانات الخاصة ومصدرها وطريقة حساب القيم المعرضة للخطر وعدد الوفيات ومدد الملاحظة .. إلى آخره. وذلك للوصول إلى معدلات الوفاة الخام. المرحلة الثانية وتتمثل في تمهيد البيانات الخام والمعدلات وتدرجها لتخليصها من عدم الانتظامية الناتجة من طبيعة البيانات واخطاء المعاينة. والبيانات الممثلة لعدد الوفيات (d_{χ}) ومعدلات الوفاة تعتبر اساس هيكل جداول الوفيات، فإذا توافرت بيانات خبرة كافية عن عدد الوفيات مع الرقم الأساسي لعينة الدراسة أمكن – بخطوات تقليدية ـ استكمال باقي اعمدة جدول الحياة الوفيات.

والجدير بالذكر أن معظم بيانات خبرة الوفيات العملية هي في حقيقتها عينات مختارة عشوائيا من المجتمعات محل الدراسة، لذلك فإن معدلات الوفاة عند الأعمار المختلفة والمحسوبة من بيانات تلك الخبرة عادة ما تكون معرضة لأخطاء المعاينة الاحصائية الخاصة بإختيار العينات العشوائية بالاضافة الي الصعوبات التي تنتج من تأثير المراحل السنية لمفردات العينة علي استواء منحني دالة الحياة. وبناء علي تلك الصعوبة تقسم البيانات الي مجموعات خاصة بالمراحل السنية المتقاربة بحيث تكون مجموعة بيانات ممثلة لمرحلة سنية تنتظمها دالة حياة لها معالمها الخاصة، ولتكوين دالة حياة واحدة تمثل المجتمع منذ الميلاد الي اقصي عمر يمكن ان يعيشة الفرد في نفس المجتمع (ϖ) تتم بما يعرف بتدريج البيانات Graduation data وتهدف الي تمهيد نقاط الاتصال بين اطراف فئات العمر في الجدول. ان إعداد جدول بهذه الطريقة يحتاج وقتا وجهدا وتكلفة عالية كما تحتاج الي تكنيات وخبرات ذات مستوي معين قد لا

تتوافر في معظم دول العالم ومن ثم فان عملية انشاء جدول حياة (وفيات) لا تتم كل سنة وانما تتم علي فترات دورية طويلة وصلت في المتوسط الي عشرين سنة في النصف الأول من القرن العشرين بينما انخفض طول الفترة في النصف الثاني من نفس القرن الي عشر سنوات.

بناء علي الوضع السابق فان شركات التأمين كانت وما زالت تصدر وثائق تأمينات الحياة بأقساط واحتياطيات فنية بناء علي بيانات خبرة مضي علي وقت طويل. ومن ناحية أخري فان التطور الصحي والبيئي يؤدي – بالدليل القاطع - الي انخفاض معدلات الوفاة ومن ثم ارتفاع معدلات الحياة ومن ثم فان الوثائق التي تصدرا شركات التأمين معتمدة علي بيانات خبرة مضي عليها وقتا طويلا تواجه مشكلة عدم العدالة بين اطراف عقد التأمين وهذا بدور يمثل تحديا امام اي نشاط يهدف الي تطوير منتجات تأمينات الحياة. هذا التحدي معروف لدي الأكاديمين وفي اسواق التأمين بخطر طول العمر[32.1] Longevity risk.

خلال العقدين الأخيرين، استجاب الباحثون والمسئولون عن اسواق التأمين - بصورة جزئية - لضغط الهيئات الرقابية وشكاوي حملة الوثائق باصدار انواع جديدة من منتجات تأمينات الحياة تشترك جميعها في خاصية إشتراك حامل الوثيقة في الأرباح المحققة في نهاية العام، مع القناعة التامة بان مبرر الاستراك في الأرباح وان معظم مكاسب شركات التأمين ناتج عن الفروق بين معدلات الوفاة المقدرة والفعلية، وكذلك الفروق بين معدلات العائد من استثمار اموال حملة الوثائق والمعدل الفني المستخدم في حسابات القيمة الحالية لمبالغ التأمين.

ثانيا:- المشـــــكلة

تعتبر عملية تقدير تكلفة وثائق تأمينات الحياة طبقا للنظام الاكتواري عملية ليست صعبة طاما توافر لها بيانات الخبرة الممثلة للمجتمع في شكل جداول الوفيات (الحياة) ولكن المشكلة تكمن اساسا في طريقة اعداد تلك الجداول وتكلفتها من حيث الوقت والجهد والمال. كما أن طبيعة البيانات المقدرة من بيانات خبرة قديمة لا تمثل الواق ولو نسبيا يعتبر اساس مشكلة هامة. ويمكن تلخيص المشكلة التي يعالجها البحث في الآتي:

١. لا تتوافر بيانات خبرة حديثة وكافية في مصر ومعظم دول العالم تمثل ناتج عمليات شركات تأمينات الحياة في تلك البلاد.
٢. اعتماد شركات تأمينات الحياة علي بيانات تقديرية مضي عليها مدة طويلة أدي الي فروق جوهرية بين التزامات طرفي عقد التأمين وهذا لا يحقق شرطي العدالة والكفاية اللازمين في قسط التأمين.
٣. لا تستخدم شركات التأمين خاصة في السوق المصرية دوالا رياضية لتعديل الأسعار كي تتناسب مع تأثير التحسن.

ثالثا:- هـــدف الدراســـــة

ان علاج المشكلة الأساسية السابق الاشارة اليها يكون في توفير بيانات محدثة بناء علي بيانات خبرة فعلية وبصورة مستمرة، وفي هذا الاطار يمكن استخدام التغير في معدلات الحياة لمراحل العمر المختلفة علي مدار السنوات المنقضية والناتج من التحسن الصحي والبيئي في التوصل الي بيانات تكون اقرب ما يمكن الي البيانات الفعلية. وحينئذ يكون هدف الدراسة التوصل الي شكل جديد لدالة الحياة يمكن استخدامها في تحديث البيانات اعتمادا علي بيانات الخبرة الماضية.

والجدير بالذكر ان العديد من الرياضيين والخبراء الاكتواريين عالجوا دالة الحياة، وكل منهم اضاف جديدا الي ما سبقه في ناحية من النواحي. فقد اقترح [20, 26] Abraham De Moivre سنة ١٧٢٤ دالة خطية لتمثيل دالة الباقين علي قيد الحياة (l_x) بالصيغة الآتية.

$$L_x = l_o \left(1 - \frac{x}{86}\right)$$

وفي عام ١٨٢٥ استعمل بنجامين جوميرتز [299,15] ، [27,26] Benjamin Gompertz أسس فسيولوجية لتبيان وطأة الوفاة Intensity of Mortality علي اساس انها متوسط استهلاك قوة الإنسان في مقاومة الوفاة، وقد اعتبر معدل الوفاة اللحظي μ_x تعبيرا عن تلك القيمة ولذلك اقترح في صياغة ذلك الدالة الآتية.

$$\mu_x = B\,C^X$$

وفي عام ١٨٦٠ أقر ماكيهام [299,15] ، [22,26] Makeham ما سبق أن جاء به جومبيرتز حيث امكن تقسيم أسباب الوفاة إلى سببين الأول السبب الطبيعي للوفاة والثاني سبب التزايد الأسى في معدلات الوفاة، لذا كتب ماكيهام معادلة معدل الوفاة اللحظي على الصورة :

$$\mu_\chi = A + B\,C^\chi;\ A, B, C \text{ are constants}$$

وفي عام ١٨٧٢ كون [36, 15] Thiele الصورة التالية لمعدل الوفاة اللحظي:

$$\mu_\chi = a_1 \exp[-b_1\chi] + a_2 \exp[-Y_2\, b_s (\chi - C)^2] + a_3 \exp[b_3\chi];$$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, c are constants

في عام ١٩٣٢ صاغ Perks [305,15] عائلة من المنحنيات لإستعمالها في تسوية بيانات جدول الحياة بالشكل التالي:

$$\mu_\chi = \frac{A + BC^{X}}{KC^{-X} + 1 + DC^{X}}; \text{ A, B, C, K, D are constants}$$

وحاول Carl Person [37 ،37] تمثيل البيانات الحيوية عن السكان باستخدام عدد من المنحنيات المتداخلة الممثلة لمراحل العمر المختلفة للتوصل الي عدد الوفيات ومعدل الوفاة اللحظي (d_χ, μ_χ). ودرس Phillips عام ١٩٣٥ منحنيات لتمثيل عدد الوفيات بدلاً من معدل الوفاة اللحظي [37, 15]. ثم قام Barnett [14] ١٩٧٠ بإدخال بعض التعديلات على دالة Perks لتكون بالصورة الآتية.

$$l_X = \frac{a - H_X + BC^X}{1 + a - H_X + BC^X}$$

في ١٩٨٠ اقترح Heligman and Pollard دالة جديدة لمعالجة بيانات معدلات الحياة في مراحل عمرية مختلفة تطبيقا علي الوفيات الأسترالية. وفي عام ١٩٨٨ قام ForFar, McCatchen, Wilkie [20] بتقديم دراسة في تسوية وتحسين معدلات الوفاة بالطرق الرياضية تناول فيها طرق Gompertz and Makeham وأيضا صيغه Barnet [15, 20]. وكانت صيغته كما يلي:

$$q_\chi / p_\chi = A + H_X + BC^\chi$$

وفي [١٩٩٣] طور Heligman and Pollard دالتهم السابقة [14] بهدف جذب الانتباه الي ظاهرة ضغط الوفيات Compression of Mortality والتي تعتبر اداة للتركيز علي خطر طول العمر. وتناول Faries في عام [١٩٨٠] ظاهرة طول العمر والتي تعبر بشكل صريح عن خطر طول العمر Longevity Risk. في عام (١٩٩٤) قدم Jacaues Carriere [25] دالة عبارة عن مزيج بين عدة دوال Compertz, Inverse Comports, Waybill, Inverse Waybill. وفي عام [٢٠٠٥] اقترح Bongarts [17] دالة حياة عبارة عن مزيج بين دالة Logistic model Gompartz وصيغتها كما يلي:

$\mu_\chi = a\, e^{-BX} . e^{-\lambda t}$; a, B parameters, and λ change rate based on time t

عام (٢٠١٠) قدم Roger thatcher, SiucheungK chiro Horiunch and Robine دراسة بعنوان : "The compression of death above the mode" حيث استخدموا simple Logistic model two parameters لدراسة مرحلة ضغط الوفيات لكبار السن فوق المنوال. وتوصلوا ايضاً إلى أن التوزيع الاحتمالي لسن الوفاة سيتحول إلى اليمين من دون تغير في الشكل وهذا يسمى نموذج التحول اللوجيستي shifting logistic model.

قام Jack Cyue (٢٠١١) بدراسة بعنوان : "Mortality Compression & Longevity" حيث استخدم البيانات الخام بدلاً من البيانات الممهدة لثلاثة دول (اليابان ، السويد ، الولايات المتحدة) واستخدم مقاس Cheung ثلاثي الأبعاد لقياس ظاهرة طول العمر وقام بتطوير هذا

النموذج، وتوصل إلى مقياس خماسي الأبعاد مكون من المقاس الأول والثاني والثالث لـ Cheung والرابع التباين لتوزيع العمر والخامس احتمالات البقاء بعد السن الكبير ويستخدم في تقييم حد الحياه ومعرفة ما إذا كان التوزيع العمري للوفيات يتناسب مع التوزيع الطبيعي أم لا ، وقد توصل ايضاً إلى أن متوسط العمر المتوقع في تزايد مستمر حيث أن منحنى البقاء من المرجح أن ينتقل إلى اليمين مرة أخرى .

يتضح مما سبق ان معظم الدراسات السابقة تناولت تسوية معدلات الوفاة الفعلية ودراسة ظاهرة طول العمر والعمل على جداول الوفيات المعدة سابقا بناء دوال حياة ذات معالم متعددة مما تحتاج الى مجهود كبير للتنبؤ بقيم معالمها ولم تتناول الدراسات السابقة مفهوم التنبؤ باستخدام تقديرات معالم دالة الحياة لقياس اثر التحسنات الصحية والبيئية وهو ما يتم من خلال هذه الدراسة.

رابعاً: قانون ماكيهام لمعدلات الحياة P_x:

للوصول إلى صورة قانون معدل الحياة لماكيهام، يمكن أن نبدأ من الصورة النهائية لقانون معدل الوفاة اللحظي السابق μ_χ حيث[40] $\mu_x = A + BC^x$ ومن ثم تكون صيغة ماكيهام لمعدل البقاء علي قيد هي:

$$p_x = \exp\left[-A - \frac{B(c-1)}{\ln c} c^x\right] \quad \Rightarrow \text{Makeham' survival rate}$$

(١/٤) تقدير قيمة معالم الدالة المقترح استخدامها (دالة ماكيهام)

لتقدير قيمة معالم دالة ماكيهام Parameters of Makeham` formula يعتمد الباحث على أسلوب هاردي لتسوية جداول الحياة لإستخدامه في التنبؤ بمعالم الدالة P_x P_x [A,B,C][15] حيث[300, 22]:

$$P_x = \exp\left[-A - \frac{B(c-1)}{\ln c} c^x\right]$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$-\ln P_x = A + \frac{B(c-1)}{\ln c} c^x$$

حيث $Z = \left(-\ln P_{x_1}\right) - \left(-\ln P_{x_2}\right)$

$$-\ln(Z) = \ln \frac{\ln c}{B(c-1)(c^t - 1)} - X \ln c$$

وتكون هذه المعادلة على شكل دالة خطية لوغاريتيمة والتي يمثلها خط مستقيم، ولذلك يمكن التنبؤ بقيمة [A,B, C] باستخدام الرسم البياني ومعادلة الانحدار (طريقة هاردي)[40],[300,22] كما يلي:

$$-\ln c = \text{slope}$$

$$c = \exp[-\text{slope}]$$

ويتم تقدير قيمة B من القانون

$$B = \frac{\ln c\ \exp(-y)}{c^x (c-1)(c^t - 1)}$$

ويتم تقدير قيمة A من القانون

$$\mathrm{A} = (-\ln P_x) - \frac{Bc^x}{\ln c}(c-1)$$

وللتأكد من دقة التقدير قام Scollnik , David [42] بإعداد حدود عليا ودنيا لكل من قيمتي [A,B, C] حيث كانت كما يلي:

C = [1.06 < C < 1.12]
B = [0.000001 < B < 0.001]
A = [A ≥ - B]

يعتمد الباحث هنا على ثوابت مرحلية التغير للمعالم [A,B, C] أي تحديد قيمة المعالم حسب المرحلة العمرية التي تشير اليها هذه المعالم تقدير [A, B, C] كما يلي:

$$[20-30],[30-60],[60-65],[65-70],[70-\omega].$$

(٢/٤) استكمال بيانات جداول الحياة والوفاة المختصرة

(١/٢/٤) تطبيق نموذج دالة الحياة لماكيهام

يتم استخدام معدلات الوفاة المتاحة عند نقاط الارتكاز المرحلية(q_{20}, q_{30}, q_{60}، q_{70}، q_{80}، q_{90}) لتقدير قيم معالم الدالة المقترحة [A, B, C] لكل مرحلة واستخدام القيم التقديرية للمعالم للتنبؤ بمعدلات الوفاة للمراحل العمرية السابق الاشارة اليها لإستكمال بيانات جداول الحياة المختصرة.

ومن ثم يتوافر لدينا جداول وفيات ذات معدلات وفاة متوقعة ومسواة ويكون التطبيق علي بيانات جداول الحياة الإكتوارية الأمريكية Actuarial life tables For USA 1995, 2000, 2005, 2010 . وباستخدام برنامج Excel 2010 يمكن التوصل الي النتائج ممثلة في الجداول الآتية:

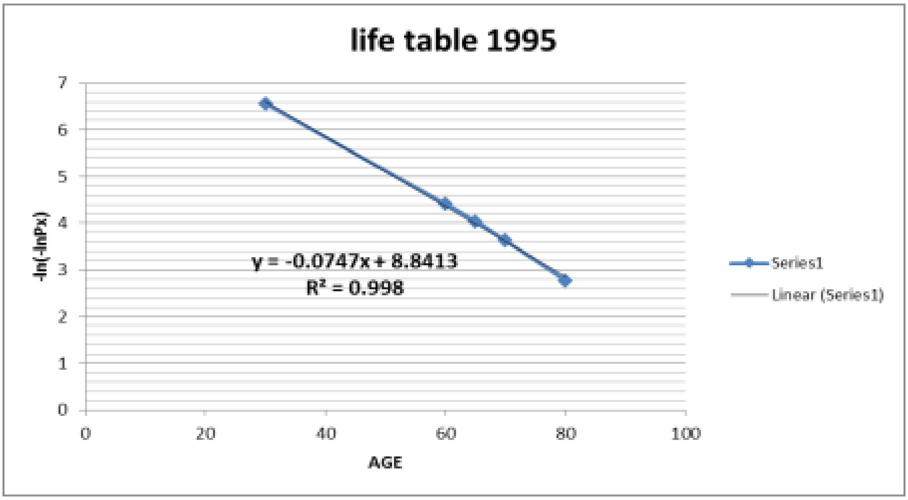
جدول(١-١)

قيم معالم دالة ماكيهام لعام ١٩٩٥

Year	qx	px	(-ln Px)	(-ln(-lnPx)
20	0.0010157	0.9989843	0.0010162	6.891636
30	0.0014177	0.9985823	0.0014187	6.5580126
60	0.01201013	0.9879899	0.0120828	4.4159696
65	0.01735198	0.982648	0.0175043	4.045309
70	0.02617729	0.9738227	0.026526	3.6296295
80	0.06015038	0.9398496	0.0620354	2.7800502

جدول (١-٢)

age	slope	c	(-lnpx)	(-lnpx)2	A
30-80	-0.0746799	1.077539211	0.001418702	0.000915628	0.00050307
20-30	-0.0201463	1.020350569	0.001418702	-0.00091563	0.00233433
30-60	-0.0714014	1.074012283	0.012082833	0.010123458	0.00195938
60-65	-0.0741321	1.076949087	0.017504295	0.015109977	0.00239432
65-70	-0.0831359	1.086689487	0.026526012	0.022552711	0.0039733
70-80	-0.0849579	1.088671257	0.062035391	0.249349438	-0.187314



جدول(١-٣)
معدلات الحياة لعام ١٩٩٥ طبقا لدالة الحياة لماكيهام

X	c	B	A	PX
20	1.020351	0.000272	0.002334	0.997258
21	1.020351	0.000289	0.002334	0.997224
30	1.074012	0.000104	0.000503	0.998582
31	1.074012	0.000105	0.000503	0.998506
60	1.076949	0.000114	0.001959	0.98799
61	1.076949	0.000115	0.001959	0.987156
90	1.088671	5.12E-05	0.003973	0.890563
91	1.088671	5.1E-05	0.003973	0.882289

جدول(١-٤)
بيانات جدول الوفيات عام ١٩٩٥ طبقا لدالة الحياة لماكيهام

X	px	qx	lx	dx	Lx.	Tx	e`x
20	0.99725843	0.002741573	95399	262	95269	5415080	56.76
21	0.99722425	0.002775754	95138	264	95006	5319811	55.92
30	0.9985823	0.001417697	92636	131	92570	4474598	48.30
31	0.99850606	0.001493945	92505	138	92436	4382027	47.37
60	0.98798987	0.012010128	81710	981	81219	1809660	22.15
61	0.98715611	0.012843887	80728	1037	80210	1728441	21.41
90	0.89056317	0.10943683	21784	2384	20592	116746	5.36
91	0.88228908	0.117710916	19400	2284	18259	96154	4.96

لقد تم الاعتماد على معادلات جداول الحياة التالية فى تكوين جداول الحياة السابقة :

$$q_{x+k} = 1 - P_{x+k}$$

$$l_{x+k} = (P_{x+k})(l_{x+k-1})$$

$$d_{x+k} = (q_{x+k})(l_{x+k})$$

$$L_{x+k} = l_{x+k} - 0.5 d_{x+k}$$

$$T_{x+k} = \sum_{x+k}^{\omega} L_{x+k}$$

$$e^{\circ}_{x+k} = \frac{T_{x+k}}{l_{x+k}}$$

(٢/٢/٤) تحليل النتائج [اختبارات جودة التوفيق]

كما يمكن اختبار اقتراب معدلات الوفاة المتوقعة من معدلات الوفاة الفعلية من واقع البيانات الواردة بالجداول (١٩٩٥- ٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) للأعمار عند تمام السنة ٢٠ إلى ω وذلك من خلال مجموعة الاختبارات التالية:

(١/٢/٢/٤) اختبار χ^2

يتم اختبار جودة توفيق البيانات المتوقعة مع البيانات الفعلية لجميع الجداول باستخدام اداة الاختبار المعروفة مربع كاي، ويعرض الجدول الآتي قيم χ^2 المحسوبة من واقع البيانات الواردة بالجداول(١٩٩٥- ٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) للأعمار المشار اليها في الجدول.

جدول (٥):

قيم المحسوبة بواسط χ^2

age	1995	2000	2005	2010
20	0.39846082	0.39582454	0.38623753	0.46993378
21	0.38453286	0.36987235	0.35736587	0.42747741
22	0.38048468	0.35581875	0.34297456	0.39982944
30	0.0003329	0.00025724	0.00025182	0.00027316
31	0.00094712	0.0002253	0.00039096	0.00052092
32	0.0014544	0.00088067	0.00203057	0.00355829
33	0.00165674	0.00224463	0.00653521	0.00902765
42	0.00069154	0.0024294	0.00364711	0.04067079
43	0.00169992	0.00214739	0.00258483	0.03204186
44	0.00271801	0.00171369	0.00172128	0.02351375

45	0.00435395	0.00101531	0.00117574	0.01791368
60	0.00045163	0.00041387	0.00060162	0.00102079
61	1.4096E-05	0.00125361	0.00149807	9.2224E-05
62	0.00056435	0.00239816	0.00219142	9.6698E-05
63	0.00126187	0.00329604	0.0017984	0.00058618
82	0.0306837	0.03718863	0.05249431	0.02241826
83	0.0385494	0.04470177	0.05469344	0.0273119
84	0.04835212	0.04936867	0.05489389	0.03758931
χ^2=	4.04410438	4.81333969	5.09433806	5.42719531

ويتضح من جدول (٥) ان قيم (χ^2 المحسوبة) لأعداد الوفيات الناتجة من دالة الوفاة لماكيهام باستخدام طريقة هاردى لتقدير قيم معالمها والممثلة للسنوات (١٩٩٥- ٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) هي (٤.٠٤- ٤.٨١- ٥.٠٩- ٥.٤٣)على الترتيب، وبمقارنة تلك القيم مع قيم χ^2 الجدولية عند درجة معنوية ٥% ودرجات حرية = ٧٦ للجداول (٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) ودرجات حرية =٦٢ لجدول (١٩٩٥) والتي تساوي (٩٧.٣٤- ٨١.٣٧) على الترتيب.
نستنتج معنوية اختبار χ^2 . وهذا يدل علي انه لا توجد فروق جوهرية ذات دلالة احصائية بين القيم الفعلية والقيم المقدرة طبقا للنموذج المقترح.

(٢/٢/٢/٤) اختبار الانحرافات الفردية المعيارية:

نختبر في هذا الجزء اقتراب معدلات الوفاة المتوقعة من معدلات الوفاة الفعلية باستخدام الانحرافات الفردية المعيارية المحسوبة من واقع الجداول(١٩٩٥- ٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) والجدول رقم (٦) يتضمن قيم

الدرجات المعيارية لبيانات الجداول الفعلية والجداول المقدرة حيث نجد أن اى من قيم الانحرافات الفردية المعيارية المحسوبة لاعداد الوفاة المتوقعة واعداد الوفاة الفعلية لا تخرج عن حدود منطقة القبول (-٢ : ٢) مما يؤكد ان نموذج ماكيهام يحقق نتائج دقيقة.

(٣/٢/٢/٤) اختبار الإشارة

في هذا الاختبار نحدد إمكانية قبول فرض العدم بوجود توازن مقبول بين عدد الإشارات الموجبة والاشارات السالبة، ونحتاج لبدء هذا الاختبار معرفة الانحرافات الفردية للقيم العادية لبيانات الجداول الفعلية وبيانات الجداول المقدرة. والجدول رقم (٧) يتضمن قيم الانحرافات. ومن جدول (٧) يتضح الآتي:

١- عدد المفردات الكلية ٦٤ مفردة لجدول (١٩٩٥) و٧٨ مفردة للجداول (٢٠٠٠- ٢٠٠٥-٢٠١٠).
٢- عدد الانحرافات الفردية لاعداد الوفاة الفعلية و اعداد الوفاة المقدرة ذات الإشارة الموجبة هي [٤٠ – ٣٧ – ٣٤ - ٣٣] علي الترتيب للسنوات محل الدراسة. ويمكن حساب قيمة اختبار t كما يلي:

جدول رقم (٧+)

السنوات	١٩٩٥	٢٠٠٠	٢٠٠٥	٢٠١٠
قيم اختبار t	١.٧٥	(٠,٤٥)	(١.١٣)	(١.٣٦)

ونلاحظ أن قيمة t تقع بين (-١.٩٦ : ١.٩٦) مما يؤدى الى قبول الفرض العدم (وجود توازن بين عدد الاشارات الموجبة والسالبة للانحرافات الفردية بين المعدلات الفعلية والمعدلات المتوقعة بنموذج ماكيهام).

(٤/٢/٢/٤) اختبار الانحرافات المتراكمة:

يستخدم الباحث اختبارا آخر للدلالة علي أن استخدام النموذج المقترح افضل من مثيلة لماكيهام، وهذا الاختبار الجديد يسمي اختبار الانحرافات

المتراكمة ويقوم علي حساب الانحرافات المعيارية لمجموع الانحرافات بين القيم المقدرة والقيم الفعلية. ومعادلته كالآتي:

$$\left[\frac{\sum(\theta_x - E_x q_x)}{\sqrt{\sum(E_x q_x p_x)}}\right]$$

وبتنفيذ الاختبار ينتج النتائج الآتية الموضحة في الجدول رقم (٧++)

جدول(٧++)

قيم الانحرافات المتراكمة لنموذج دالة الحياة لماكيهام

Year	١٩٩٥	٢٠٠٠	٢٠٠٠٥	٢٠١٠
$\frac{\sum(\theta_x - E_x q_x)}{\sqrt{\sum(E_x q_x p_x)}} =$	١٠.١٩	١٠.٦٩	١٣.٦٧	١٣.٢٥

ونجد أن قيم هذا المقدار جميعاً اكبر من |٢| وبالتالي نرفض الفرض وهو ان الانحرافات المتجمعة للاعمار تكون توزيع طبيعى ونقبل البديل وهو ان الانحرافات المتجمعة للاعمار لا تكون توزيع طبيعى.

خامسا:ـ النموذج المعدل لدالة الحياة.

من النتائج السابقة وجدنا ان دالة الحياة لماكيهام تعطي نتائج دقيقة نسبيا وليست بدرجة عالية، وفي هذه الدراسة ندخل بعض التعديلات على معالم الدالة [B,C] بهدف اظهار أثر التحسن الصحي - مع مرور الزمن (t) - على تقديرات تلك الدالة

(١/٥) النموذج المقترح لتقدير قيم معالم دالة ماكيهام :

لتقدير قيم معالم الدالة [B , c] يمكن الاعتماد على طريقة طريقة هاردي مع الرسم المصاحب الذي يعتمد على دالة معدلات الحياة P_{x+k}. ولكن الباحث يقترح طريقة اخرى لتقدير قيم هذه المعالم حيث يعتمد على دالة معدل الوفاة اللحظية μ_{x+k} كما يلي:

يمكن تقدير قيمة c من خلال الصيغة الآتية:

$$C = exp\left(\frac{ln\left(\frac{\mu_{(X+k)_{HL}} - \mu_{(X+k)_{CL}}}{\mu_{(X+k)_{CL}} - \mu_{(X+k)_{LL}}} \right)}{((X+k)_{CL} - (X+k)_{LL})} \right) \qquad (8)$$

حيث ان

$(x+k)_{HL}$: تمثل الحد الاعلى للفئة العمرية للمعدل اللحظي.

$(x+k)_{CL}$: يمثل الحدالاوسط لنفس الفئة العمرية للمعدل اللحظي

$(x+k)_{LL}$: يمثل الحد الادنى لنفس الفئة العمرية للمعدل اللحظي

$\mu_{(x+k)_{HL}}$: يمثل معدل الوفاة للحد الاعلى للفئة اي عند $((x+k)_{HL})$ للمعدل اللحظي

$\mu_{(x+k)_{CL}}$: يمثل معدل الوفاة للحد الاوسط للفئة اي عند $((x+k)_{CL})$ للمعدل اللحظي

$\mu_{(x+k)_{LL}}$: يمثل معدل الوفاة للحد الادنى للفئة اي عند $((x+k)_{LL})$ للمعدل اللحظي

من الدالة الأساسية $\mu_{x+k} = A + BC^{x+k}$ يمكن اثبات أن

$$C = exp\left(\frac{ln\left(\frac{\mu_{(X+k)_{HL}} - \mu_{(X+k)_{CL}}}{\mu_{(X+k)_{CL}} - \mu_{X_{LL}}} \right)}{(X_{CL} - X_{LL})} \right)$$

تقدير C تم قبل ذلك

وأن

$$B = exp\left[ln\left(\mu_{(X+k)_{HL}} - \mu_{(X+k)_{CL}}\right) - (X+k)_{CL}\, ln\, C - ln\left(C^{\Delta(X+k)} - 1\right)\right] \qquad (9)$$

وأن

$$A = \mu_{(X+k)_{CL}} - BC^{(X+k)_{CL}} \qquad (10)$$

ويكون النموذج المقترح كالاتى :

$$\mu_{x+k} = A + BC^{x+k}$$

$$\mu_{X+k} = \left(\mu_{(X+k)_{CL}} - BC^{(X+k)_{CL}}\right) + \left(exp\left[ln\left(\mu_{X+K_{HL}} - \mu_{X+K_{CL}}\right) - (X+k)_{CL}\, ln\, C - ln\left(C^{\Delta(X+k)} - 1\right)\right]\right)\left(exp\left(\frac{ln\left(\frac{\mu_{(X+k)_{HL}} - \mu_{(X+k)_{CL}}}{\mu_{(X+k)_{CL}} - \mu_{(X+k)_{LL}}}\right)}{(X+k)_{CL} - (X+k)_{LL}}\right)\right)^{X+k} \qquad (11)$$

<u>(٢/٥) استكمال بيانات جداول الحياة والوفاة المختصرة</u>

<u>(١/٢/٥) تطبيق النموذج المقترح :</u>

نستخدم الطريقة التقريبية الرابعة السابق الاشارة لها فى الفصل الثانى المبحث الاول:

$$\mu_x = \frac{(\ell_{x-2} - \ell_{x+2}) - 8(\ell_{x-1} - \ell_{x+1})}{12\,\ell_x}$$

وبالتالي يمكن استخدام هذا التقريب بدرجة عالية من الثقه في تقدير معدل الوفاه اللحظي (μ_x) عند نقاط الارتكاز للمراحل العمرية السابق الاشارة اليها $\left(\mu_{20}, \mu_{25}, \mu_{30}, \mu_{45}, \mu_{60}, \mu_{65}, \mu_{70}, \mu_{80}, \mu_{90}\right)$، ثم نستخدمها لتقدير قيم المعالم الدالة المقترحة [A,B,C] لكل مرحلة واستخدام القيم التقديرية تلك المعالم للتنبؤ بمعدلات الوفاة للمراحل العمرية السابق الاشارة اليها لإستكمال بيانات جداول الحياة المختصرة ومن ثم يتوافر لدينا جداول وفيات ذات معدلات وفاة متوقعة ومسواة ويكون التطبيق علي بيانات جداول الحياة الإكتوارية الأمريكية (١٩٩٥- ٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) وباستخدام Excel 2010 يمكن التوصل الي النتائج ممثلة في الجداول الآتية:

جدول(٨-١)

قيم معدلات الوفاة اللحظية لعام ١٩٩٥

AGE	L-2	L-1	L	L+1	L+2	µ
20	98,641	98,548	98,451	98,351	98247	0.0010005
25	98141	98033	97924	97814	97703	0.00111821
30	97589	97469	97341	97203	97056	0.00136547
45	94801	94525	94234	93928	93603	0.00316411
60	87785	86956	86094	85060	83986	0.01100444
65	82829	81593	80279	78886	77410	0.01685476
70	75842	74172	72391	70496	68488	0.02538759
75	66369	64145	61818	59391	56864	0.03845563
80	54236	51507	48678	45750	42728	0.05914376

جدول(٨-٢)

قيم معالم الدالة المقترحة لعام ١٩٩٥

Year	µ	px	lnc	c	lnqx	B	A
20	0.0010005	0.998984266	0.022247	1.0224964	-6.907258	6E-04	5E-06
25	0.0011182	0.99887668	0.039954	1.0407627	-6.796022	4E-04	-2E-05
30	0.0013655	0.998582303	0.056025	1.05762	-6.596253	2.543E-04	1E-05
45	0.0031641	0.996752764	0.083095	1.0866452	-5.755884	8E-05	-2E-06
60	0.0110044	0.987989872	0.085267	1.08901	-4.509456	6.603E-05	6E-04
65	0.0168548	0.982648015	0.081925	1.08537	-4.083122	8.204E-05	-6E-05
70	0.0253876	0.973822713	0.083049	1.08659	-3.673495	7.584E-05	5E-05
75	0.0384556	0.96073959	0.086093	1.0899079	-3.258250	6E-05	-1E-04
80	0.0591438	0.939849624					

جدول(٨-٣)

بيانات جدول الوفيات عام ١٩٩٥ طبقا للدالة المقترحة

age	px	qx	lx	dx	Lx.	Tx	e`x
20	0.998984	0.001015729	98397	100	98347	5649716	57.42
21	0.998962	0.001038466	98297	102	98246	5551368	56.48
30	0.998582	0.001417676	97280	138	97211	4671073	48.02
31	0.998502	0.001498488	97142	146	97070	4573862	47.08
60	0.987997	0.012003234	87437	1050	86912	1863473	21.31
61	0.986987	0.013012895	86387	1124	85825	1776562	20.57
98	0.747395	0.252605384	3838	969	3353	5831	1.52
99	0.7281	0.271899962	2868	780	2478	2478	0.86

(٢/٢/٥) تحليل النتائج [اختبارات جودة التوفيق]

(١/٢/٢/٥) اختبار : χ^2

يتم اختبار جودة توفيق البيانات المتوقعة مع البيانات الفعلية لجميع الجداول باستخدام اداة الاختبار المعروفة مربع كاي، ويعرض الجدول الآتي قيم χ^2 المحسوبة من واقع البيانات الواردة بالجداول (١٩٩٥- ٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) للأعمار المشار اليها في الجدول.

جدول (١٢):

القيم المحسوبة بواسط χ^2

age	1995	2000	2005	2010
20	2.0521E-11	2.1905E-10	4.9636E-10	5.5015E-10
21	0.00033445	0.00159582	0.00211244	0.00285255
22	0.00026239	0.0030479	0.00383282	0.00516253
30	8.8095E-09	1.6541E-08	8.4887E-09	1.6937E-08
31	8.6691E-05	0.00091659	0.00118029	0.00090467
32	0.00022036	0.00189977	0.00334579	0.00330888
45	1.9233E-09	7.2941E-07	2.9146E-06	4.923E-06
46	5.6855E-05	0.00039218	0.00019906	0.00112934
60	0.00024062	5.6947E-05	8.1659E-06	0.00011708
61	0.0020906	1.0245E-05	0.00011633	0.00024349
62	0.00155638	2.6777E-08	0.00032634	0.00036375

80	0.00019359	1.4733E-05	2.984E-06	6.427E-05
81	7.4396E-06	7.7318E-06	1.8554E-08	0.00022192
82	0.00014839	0.0001189	2.3184E-06	0.00046481
χ^2=	0.75781202	0.25590074	0.17495941	0.78059849

ويتضح من جدول (١٢) ان قيم (χ^2 المحسوبة) للجداول (١٩٩٥- ٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) تساوى (٠.٧٥ – ٠.٢٥ – ٠.١٧ – ٠.٧٨) على الترتيب، وبمقارنة تلك القيم مع قيم χ^2 الجدولية عند درجة معنوية ٥% ودرجات حرية = ٧٦ للجداول (٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) ودرجات حرية =٦٢ لجدول (١٩٩٥) والتي تساوي (٩٧.٣٤- ٨١.٣٧) على الترتيب.

وهذا يدل علي انه لا توجد فروق جوهرية ذات دلالة احصائية بين القيم الفعلية والقيم المقدرة طبقا للنموذج المقترح.

ولتوضيح أهمية استخدام النموذج الجديد نقارن نتائج χ^2 المحسوب طبقا للنموذج المقترح مع النتائج المحسوبة بواسطة دالة ماكيهام الواردة في الفصل الثانى المبحث الاول نجد الآتي:

جدول رقم (١٢+)

السنوات	قيمة χ^2 للنموذج الجديد	قيمة χ^2 لنموذج ماكيهام
١٩٩٥	٠.٧٥	٤.٠٤
٢٠٠٠	٠.٢٥	٤.٨١
٢٠٠٥	٠.١٧	٥.٠٩
٢٠١٠	٠.٧٨	٥.٤٣

بيانات الجدول اعلاه تدل علي ان النتائج بالنموذج الجديد اكثر دقة من نتائج دالة ماكيهام .

(٢/٢/٢/٥) اختبار الانحرافات الفردية المعيارية:

نختبر في هذا الجزء اقتراب معدلات الوفاة المتوقعة من معدلات الوفاة الفعلية باستخدام الانحرافات الفردية المعيارية المحسوبة من واقع الجداول(١٩٩٥- ٢٠٠٠- ٢٠٠٥- ٢٠١٠) والجدول رقم (١٣) يتضمن قيم الدرجات المعيارية لبيانات الجداول الفعلية والجداول المقدرة حيث نجد أن أي من قيم الانحرافات الفردية المعيارية المحسوبة للمعدلات الوفاة المتوقعة ومعدلات الوفاة الفعلية لا تخرج عن حدود منطقة القبول (-٢ : ٢) مما يؤكد تقارب بيانات الجداول المقدرة مع بيانات الجداول الفعلية. وبمقارنة نتائج اختبار الانحرافات الفردية المعيارية لنموذج دالة الحياة لماكيهام الواردة في الفصل الثانى المبحث الاول مع نتائج النموذج المقترح نتأكد من أن النموذج المقترح اكثر دقة من نموذج ماكيهام.

(٣/٢/٢/٥) اختبار الإشارة:

في هذا الاختبار نحدد إمكانية قبول فرض العدم بوجود توازن مقبول بين عدد الإشارات الموجبة والاشارات السالبة، ونحتاج لبدء هذا الاختبار معرفة الانحرافات الفردية للقيم العادية لبيانات الجداول الفعلية وبيانات الجداول المقدرة.
والجدول رقم (١٤) يتضمن قيم الانحرافات. ومن جدول (١٤) يتضح الآتي:

١- عدد المفردات الكلية ٦٤ مفردة لجدول (١٩٩٥) و٧٨ مفردة للجداول (٢٠٠٠- ٢٠٠٥-٢٠١٠).
٢- عدد الانحرافات الفردية لاعداد الوفاة الفعلية واعداد الوفاة المقدرة ذات الإشارة الموجبة هي [٤٠ – ٣٧ – ٣٤ - ٣٣] علي الترتيب للسنوات محل الدراسة. ويمكن حساب قيمة اختبار t كما يلي:

جدول رقم (١٤+)

السنوات	١٩٩٥	٢٠٠٠	٢٠٠٥	٢٠١٠
قيم اختبار t	(٠.١٣)	(٠,٥٩)	(٠.٣٦)	(٠.٣٥)

ونلاحظ أن قيمة t تقع بين (-١.٩٦ : ١.٩٦) مما يؤدى الى قبول الفرض العدم(وجود توازن بين عدد الاشارات الموجبة والسالبة للانحرافات الفردية بين المعدلات الفعلية والمعدلات المتوقعة بالنموذج المقترح). وبمقارنة نتيجة اختبار الاشارة لنموذج دالة الحياة لماكيهام والنموذج المقترح نجد انة يفضل الاعتماد على النموذج المقترح لانة يعطى توازنا بين عدد الاشارات الموجبة والسالبة للانحرافات الفردية بين المعدلات الفعلية والمعدلات المتوقعة .

(٤/٢/٢/٥) اختبار الانحرافات المتراكمة:

يستخدم الباحث اختبارا آخر للدلالة علي أن استخدام النموذج المقترح افضل من مثيلة لماكيهام، وهذا الاختبار الجديد يسمي اختبار الانحرافات المتراكمة ويقوم علي حساب الانحرافات المعيارية لمجموع الانحرافات بين القيم المقدرة والقيم الفعلية. ومعادلته كالآتي:

$$\left[\frac{\sum(\theta_X - E_X q_X)}{\sqrt{\sum(E_X q_X p_X)}}\right]$$

وبتنفيذ الاختبار ينتج النتائج الآتية الموضحة في الجدول رقم (١٤++)

جدول(١٤++)

قيم الانحرافات المتراكمة للنموذج المقترح

Year	١٩٩٥	٢٠٠٠	٢٠٠٠٥	٢٠١٠
$\frac{\sum(\theta_X - E_X q_X)}{\sqrt{\sum(E_X q_X p_X)}} =$	١.٦٥	١.١٩	٠.٣٩	٠.٩٧

ونجد أن قيم هذا المقدار جميعاً أقل من |٢| وبالتالي نقبل فرض العدم وهو ان الانحرافات المتجمعة للاعمار تكون توزيع طبيعى.

الفروق بين دالة ماكيهام والدالة الجديدة

لاحظنا مما سبق ان هناك فروقا بين نموذج دالة الحياة لماكيهام والنموذج المقترح لدال الحياة في الحالات الآتية:

اولا :- مجال الاستخدام

- حيث ان نموذج ماكيهام يستخدم طريقة الاستكمال البيني لتسوية بيانات جداول الحياة والوفاة المختصرة والحالية فقط (اي في حالة اعداد جداول الحياة والوفاة بعلومية بعض من عدد الوفاة (q_x) والتى تمثل معدلات الارتكاز المرحلية) .
- ولكن الطريقة المقترحة تستخدم فى استكمال جداول الحياة والوفاة المختصرة (اي اعداد جداول الحياة والوفاة بعلومية بعض من معدلات الوفاة (q_x) والتى تمثل معدلات الارتكاز المرحلية) .

ثانيا :- مستوي دقة النتائج

من نتائج الاختبارات السابقة لنتائج تطبيق الدالة المقترحة مقارنة بنتائج تطبيق دالة ماكيهام تأكدنا أن استخدام الدالة المقترحة تعطي نتائج افضل من حيث دقة التقدير كما وردت في نتائج الاختبارات الأربعة في هذا المبحث.

من هذه الدراسة تم التوصل إلى النتائج التالية: -

١- الدالة المعدلة تحقق نتائج اكثر دقة من الدالة العادية.
٢- تاثير التحسن الصحى على معدلات الحياة (P_x) خلال الفترة الزمنية (t) واضح وبقيمة معنوية.
٣- تطوير بيانات جداول الحياة عملية ضرورية واجبة بصفة دورية.

٤- تفيد الدالة المعدلة فى اختصار خطوات اعداد جداول الحياة المستقبلية.

ويوصي الباحث بالآتي :

١- يفضل الاعتماد على النموذج المقترح فى بناء جداول الحياة الجديدة طالما انة يعطى نتائج اكثر دقة.

٢- استخدام البيانات الناتجة من تطبيق النموذج المقترح فى تقدير تكلفة وثائق تامينات الحياة يحقق العدالة بين طرفى التامين.

٣- يفتح النموذج الجديد باب البحث بهدف التدقيق فى بيانات خبرة شركات التامين فى المستقبل.

REFRENCE:

1. A, Kostaki (2000) "A Relational Technique for Estimation The age-Specific mortality pattern from grouped data" Mathematical Population Studies.
2. Behnke, H. (2000) " Insurance Mathematics: A European Model", University of Osnabruck.
3. Benjamin، B. and Pollard, J.H (1993) "The analysis of Mortality and other Actuarial Statistics ". Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, England.
4. Bong arts J. (2005) "Long – Range Trends in adult mortality Models and projection Methods". Demographic Research VOL 42 (1), (23 – 49).
5. Congregates، J. [2005] "Five Period Measures of Longevity" Demographic Research (13), [547 – 558].
6. Cheung, S.L.K, Robin, Tu, E.J. and Caselli, G (2005) "Three Dimensions of the survival Curve. Horizintalization , Virtualization and Longevity Extension source " Demography , VOL 42 (243 – 258)
7. Finkelstein , Maxim and Vaupal , James W. (2006) "The relative Tail of Longevity and The mean remaining Lifetime " Demographic Research VOL 14 (7) , (111 – 138)
8. For far, D.O., McCutcheon, J.J. and wilkie. A.D. (1988). "On Graduation by M" The mathematical Formula "Philosophical Transaction of Royal Society. 41, (97-269).
9. Fries, J.F (1980). "Aging, Natural Death and the Compression of Morbidity "New England. Journal of Medicine. VOL.303 (3), (130– 135).

10. Hamilton, Gregory, L. (2003) " Life Tables for Arkansas For 2000 by Race and Gender: Methodology and Construction " Demographic Research Institute for Economic Advancement university of Arkansas at Little Rock.
11. Heligman, M.A. and Pollard, J.H. (1980) "The age pattern of Mortality". Philosophical Transaction of royal society. (107). (49 – 80).
12. JACQUES, F. Carriere (1992) "Parametric models for Life tables" society of Actuaries.
13. JACQUES. F. Carriere (1994) " A Select and Ultimate Parametric Model " Transactions of Society of Actuaries. (VOL 46).
14. Jordan, C. W. (1975) "Life Contingencies" The Society of Actuaries, Chicago, USA.
15. Juck C. yue (2011) "Mortality Compression and Longevity Risk" Society of Actuaries.
16. Kannisto, V. (2001) "Mode and Dispersion of the Length of Life" Population, an English Section, VOL. 13 (159 – 171).
17. Nadinc Ouellette and Robert BourBeau (2011) "Changes in The age at death distribution in Four Law Mortality Countries. Non Parametric Approach" Demographic Research VOL 25 (19) (595 – 628)
18. Barkalov, N.B. (1988) "Interpolation of demographic data using rational split function" Demographic.
19. Purushotham, Marianna (2011) "Mortality Improvements: Analysis of the Past and Projection of the Future " The Actuary Magazine Vol. 8 (4), Society of Actuaries.
20. Elandt, R., Johnson and N. Johnson (1980) "Survival Models and data analysis" New torch. John Wiley.

21. Scollnik, DAVID P.M. (1995) "Simulating Random Varieties from Makeham" Distribution and from others with Exact or Nearly log-concave Densities "Tram Section of Society of Actuaries (VOL 46).
22. Thatcher, A Roger، Siu Cheung, Horiuch, chiro suad Robine. J (2010) "The Compression of death above The Mode" Demographic Research VOL 22 (17) (505 – 536)
23. Valdez, E., Purushotham, M. and Huijing. (2011) "Global Mortality Improvement Experience and projection Techniques" Society of Actuaries.
24. Vladimir, Romo Canudas. (2008) "The Modal age at death and The Shifting Mortality hypothesis" Demographic Research, VOL 19 (30), (1179 – 1209).
25. WillMoth, J.R. and Horiuchi, s (1999) "Rectangularisation Revisited variability of age of death with in Human population" Demography, VOL 36 (4), (475 – 495).
26. World Bonk, World development indicators, 2011.